

Large time behavior of exponential surface diffusion flows on $\mathbb{R}$

東京大学 大学院数理科学研究科 数理科学専攻
片山 翔 (Sho KATAYAMA) *

概要

本講演では、一般化された表面拡散流 $V = \Delta_{\Gamma_t} f(-\kappa)$ を取り扱う。表面拡散流は $\mathbb{R}^N$ 内の $N - 1$ 次元曲面 Γ_t の時間発展を記述する方程式であり、 V は Γ_t が法線方向に移動する速度、 κ は Γ_t の平均曲率、 Δ_{Γ_t} は Γ_t 上の Laplace–Beltrami 作用素である。また、 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はなめらかな狭義単調増加関数である。代表的な例は指数型表面拡散流 $V = \Delta_{\Gamma_t} \exp(-\kappa)$ であり、これは Mullins [6, 7] が Gibbs–Thomson 則と呼ばれるエネルギー法則に基づいて得た結晶表面の時間発展のモデルである。

本講演では、 $N = 2$ で Γ_t が $\mathbb{R}$ 上の関数のグラフである場合に、表面拡散流 $V = \Delta_{\Gamma_t} f(-\kappa)$ の解が時間遠方で $V = -f'(0)\Delta_{\Gamma_t}\kappa$ の自己相似解と呼ばれる特殊な解に漸近することを示す。この結果は、Mullins が f を $\kappa = 0$ のまわりで線形化して得た結果を正当化する。この研究は儀我美一 (東京大) と Michael Göbwein (Duisburg-Essen 大) との共同研究に基づく。

1 導入

本講演では、 $\mathbb{R}^N$ 内の $N - 1$ 次元曲面の族 $\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$ に関する一般化された表面拡散流

$$V = \Delta_{\Gamma_t} f(-\kappa) \quad \text{on } \Gamma_t, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

を取り扱う。ここで、 V は Γ_t が法線方向に移動する速度、 κ は Γ_t の平均曲率、 Δ_{Γ_t} は Γ_t 上の Laplace–Beltrami 作用素である。また、 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はなめらかな狭義単調増加関数であり、 $f'(0) = 1$ をみたすとする。方程式 (1.1) の典型的な例は $f(r) = e^r$ とした方程式

$$V = \Delta_{\Gamma_t} \exp(-\kappa) \quad \text{on } \Gamma_t, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

であり、指数型表面拡散流と呼ばれる。なお、通常の文脈では、表面拡散流は方程式

$$V = -\Delta_{\Gamma_t} \kappa \quad \text{on } \Gamma_t, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

を指す。区別のため、以降では (1.3) を「従来の表面拡散流」と呼称する。

* E-mail: katayama-sho572@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

1.1 モデルの導出

指数型表面拡散流は, Mullins [6, 7] によって与えられた, 緩和過程と呼ばれる結晶表面の時間発展のモデルである. 緩和過程は, 結晶表面を原子が流動することによって引き起こされる時間発展の仮定であり, 低温の金 (Au) の結晶などがこの過程に従うことが知られている.

Mullins は, 結晶表面 Γ_t の法方向の移動速度 V はそこへの原子の単位時間あたり流入量に比例すると仮定した. この仮定は

$$V = -\alpha \operatorname{div}_{\Gamma_t} j$$

と表される. ここで, j は結晶表面の原子の流量であり, $\alpha > 0$ は定数である. また, j は Fick 則

$$j = -M \nabla_{\Gamma_t} \rho$$

に従う. ここで, ρ は結晶表面の原子の密度分布であり, $M > 0$ は定数である.

Mullins はさらに, ρ は Gibbs–Thomson 則

$$\log \frac{\rho}{\rho_0} = \beta \frac{\delta E}{\delta \Gamma}$$

を仮定した. これは, 密度分布の対数が表面エネルギー E の Γ による変分 $\delta E / \delta \Gamma$ に比例するというエネルギー法則であり, $\rho_0 > 0$ は定数, β は温度 θ と Boltzmann 定数 k を用いて $\beta = (\theta k)^{-1}$ と表される定数である. とくに, 表面エネルギー E が面積であるとする, $\delta E / \delta \Gamma$ は

$$\frac{\delta E}{\delta \Gamma} = -\kappa$$

と表される.

これらをあわせると, Γ_t は指数型表面拡散流

$$\Gamma_t = M \alpha \Delta_{\Gamma_t} \exp(-\beta \kappa)$$

に従うことがわかる. 適当にスケールを変換すれば (1.2) を得る.

1.2 $\mathbb{R}$ 上の関数のグラフに関する表面拡散流

以降では, それ以外を述べない限り, $N = 2$ であるとする. このとき, Γ_t は曲線であり, Δ_{Γ_t} は弧長パラメータに関する 2 階微分 ∂_s^2 となる. さらに, Γ_t は $\mathbb{R}$ 上の関数 $u(\cdot, t)$ のグラフとして表され, このとき, V, ∂_s, κ はそれぞれ

$$V = \frac{u_t}{(1 + u_x^2)^{1/2}}, \quad \partial_s = \frac{\partial_x}{(1 + u_x^2)^{1/2}}, \quad \kappa = \frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{3/2}},$$

と表される. これらを (1.1) に当てはめると, $\mathbb{R}$ 上の関数のグラフに関する表面拡散流

$$u_t = \left(\frac{1}{(1 + u_x^2)^{1/2}} \left(f \left(-\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{3/2}} \right) \right) \right)_x \quad (1.4)$$

が得られる。従来の表面拡散流は

$$u_t = - \left(\frac{1}{(1 + u_x^2)^{1/2}} \left(\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{3/2}} \right)_x \right)_x \quad (1.5)$$

となる。

Mullins は解の小ささ

$$|u_x|, |u_{xx}| \ll 1$$

を仮定した上で, (1.4) の f を線形化して (1.5) に書き直し, さらにそれを線形化することで, (1.4) が

$$u_t = -\partial_x^4 u \quad (1.6)$$

で近似されることを示した。(1.6) は重調和熱方程式, あるいは Mullins 方程式と呼ばれる。

1.3 自己相似解

従来の表面拡散流 (1.5) および Mullins 方程式 (1.6) は, 変換

$$u \mapsto u^\sigma(x, t) := \sigma^{1/4} u(\sigma^{-1/4} x, \sigma^{-1} t), \quad \sigma > 0, \quad (1.7)$$

によって不変である。(すなわち, u がこれらの方程式の解であれば, u^σ も解である。) これらの方程式の解 U が変換 (1.7) によって不変であるとき, U を自己相似解という。^{*1}Mullins は, 方程式 (1.6) を半直線 $(0, \infty)$ 上で境界条件

$$u_x = m, \quad u_{xxx} = 0, \quad (1.8)$$

のもとで考え, 自己相似解の級数表示を計算した。(ただし, 収束は議論されていない。) Martin [5] は, 別の方法で同じ自己相似解の積分表示を得たうえで, それが遠方で指数的に 0 に収束することを示した。

また, 表面拡散流 (1.5) に関しては, Koch–Lamm[4] が $\mathbb{R}$ 上での非自明な自己相似解の存在を示している。とくに, 十分小さい $\varepsilon > 0$ について, 表面拡散流 (1.5) の自己相似解 U_ε であって

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{U_\varepsilon(x, 1)}{|x|} = \varepsilon$$

となるものの存在が示された。これは, 変換 (1.7) について不変かつ初期値として $\varepsilon|x|$, $0 < \varepsilon \ll 1$, をとれるような枠組みで (1.5) に関する初期値問題の解の一意的な存在を示すという方法で証明された。実際, $\varepsilon|x|$ は変換 (1.7) について不変であるため, 解 U_ε の一意的な存在が示されると, u_ε^σ も同じ初期値問題の解となり, 一意性から $U_\varepsilon^\sigma = U_\varepsilon$ となる。また, 同様の方法により, Asai–Giga[1] は $(0, \infty)$ 上で境界条件 (1.8) をみたす自己相似解の存在を示している。

^{*1} この方程式に限らず, 自己相似解は微分方程式の解挙動を調べる手がかりとしてしばしば重要とされる。

1.4 従来の表面拡散流の時間大域挙動

表面拡散流 (1.5) の自己相似解は、より一般の表面拡散流の解の時間大域挙動を調べる上で重要な役割を果たす. たとえば, Du-Yip[2] では, 初期値 u_0 が

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |(u_0)_x(x)| \ll 1, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x) - \varepsilon|x| < \infty,$$

をみたすとき, この初期値に関する (1.5) の初期値問題の解 u について,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in t^{1/4}K} t^{-1/4} |u(x, t) - U_\varepsilon(x, t)| = 0 \quad (1.9)$$

が任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}$ について成り立つことが示された. この証明は, 解 u が減衰評価

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{t > 0} t^{k/4 + \ell} |\partial_x^{k+1} \partial_t^\ell u(x, t)| \leq C_{k, \ell}, \quad k, \ell \geq 0, \quad (1.10)$$

をみたすことを用いる. 実際, 評価 (1.10) が示されると, 同様の評価が変換 (1.7) を施された関数 u^σ についても成り立ち, Ascoli–Arzelà の定理により u^σ は部分列の意味である関数 U に $C(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ の位相で収束する.*2 極限関数 U は表面拡散流 (1.5) の解であり, また $U(x, 0) = \varepsilon|x|$ をみたすので, U は自己相似解 U_ε と一致する. また, 極限関数の一意性から, u^σ は部分列をとらずに U_ε に $C(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ の位相で収束することもわかる. u^σ を u に戻せば (1.9) が示される.

また, [2] は追加の仮定

$$u_0(x) - \varepsilon|x| = O(|x|^{-\delta}), \quad \delta > 0,$$

のもとで,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} t^{-1/4} |u(x, t) - U_\varepsilon(x, t)| = 0$$

となることも示している.

1.5 (1.4) の時間大域挙動の観察

一般化された表面拡散流 (1.4) は, 勾配非線形性 f の影響により, 変換 (1.7) に関する不変性が損なわれている. 実際, u が (1.4) の解であるとする, u^σ がみたすべき方程式は

$$u_t^\sigma = \left(\frac{1}{(1 + (u_x^\sigma)^2)^{1/2}} \left(\sigma^{1/4} f \left(-\frac{\sigma^{-1/4} u_{xx}^\sigma}{(1 + (u_x^\sigma)^2)^{3/2}} \right) \right) \right)_x$$

となってしまう. 一方で, u^σ が $\sigma \rightarrow \infty$ での極限関数 U をもつとすると,

$$U_t = -f'(0) \left(\frac{1}{(1 + U_x^2)^{1/2}} \left(\frac{U_{xx}}{(1 + U_x^2)^{3/2}} \right) \right)_x$$

*2 すなわち, u^σ のある部分列 u^{σ_n} , $\sigma_n \rightarrow \infty$, について, u^{σ_n} 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$ 上で U に一様収束し, また $\partial_x^k \partial_t^\ell u^{\sigma_n}$ は任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ 上で $\partial_x^k \partial_t^\ell U$ に一様収束する.

となり, U は従来の表面拡散流の解となる. さらに, 初期値 u_0 が条件

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u_0(x)}{|x|} = \varepsilon$$

をみたすとする, U は自己相似解 U_ε となることからわかる. 従って, 前節と同様の議論によって, 減衰評価 (1.10) を得られれば u の時間大域挙動を知ることができる.

一方で, 問題 (1.4) の減衰評価には, 勾配非線形性 f に起因する特有の困難が伴う. とくに, 方程式 (1.4) を展開すると $f'(-\kappa)$, $f''(-\kappa)$ が現れるが, これらがどのように解の評価に影響を及ぼすかが非自明であり, 慎重な取り扱いを要する. また, この際に曲率 κ を一様に評価できている必要があるが, 従来の表面拡散流の解析に用いられていたノルムは κ を各点的に制御できない. 従って, ノルムを選ぶ段階からこの点を考慮した上で慎重に選ぶ必要がある. これらの要因によって, 指数型表面拡散流を含む一般化された表面拡散流に関する研究は進んでおらず, とくに時間大域挙動に関する結果は解に小ささを仮定した上でも知られていない.

2 主定理

前節を踏まえ, 方程式 (1.4) の解の減衰評価および時間大域挙動に関する結果を述べる. なお, 方程式 (1.4) の可解性について知られている結果は存在しないため, まず可解性を議論する必要があるが, ここでは省略する.

定理 2.1 ([3]). 次をみたす $\varepsilon_0 > 0$ が存在する: $u_0 \in C^5(\mathbb{R})$ が $\sup_{\mathbb{R}} (|(u_0)_x| + |(u_0)_{xx}|) =: \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ をみたすとする, 問題

$$u_t = \left(\frac{1}{(1 + u_x^2)^{1/2}} \left(f \left(-\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{3/2}} \right) \right) \right)_x \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

の解 u は評価

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{t > 0} |u_x(x, t)| &\leq C\varepsilon_1, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{t > 0} |\partial_x^k \partial_t^\ell u(x, t)| &\leq C_{k, \ell} \varepsilon_1, \quad k, \ell \geq 0, (k, \ell) \notin \{(0, 0), (1, 0)\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

をみたす.

定理 2.2 ([3]). 定理 2.1 の仮定に加え,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u_0(x)}{|x|} = \varepsilon$$

を仮定すると, 問題 (2.1) の解 u は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in t^{1/4}K} t^{-1/4} |u(x, t) - U_\varepsilon(x, t)| = 0 \quad (2.3)$$

を任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}$ についてみたす. ここで, U_ε は従来の表面拡散流の自己相似解であって $\lim_{|x| \rightarrow \infty} U_\varepsilon(x, 1)/|x| = \varepsilon$ をみたすものである.

なお, 前述の通り, 定理 2.2 は定理 2.1 が示されれば [2] と同様にして示すことができる.

2.1 定理 2.1の証明の戦略

定理 2.1は, 方程式 (1.4) を Mullins 方程式 (1.6) からの摂動と見做して評価することにより証明する. 方程式 (1.4) は

$$u_t = -(1 - \alpha)u_{xxx} + F)_x, \quad \alpha := 1 - \frac{1}{(1 + u_x^2)^2} f' \left(-\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{3/2}} \right), \quad F := \frac{3u_x u_{xx}^2}{(1 + u_x^2)^3} f' \left(-\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{3/2}} \right), \quad (2.4)$$

と書き直される. さらに, $v := u_x$ とおき, 方程式の両辺を x で微分すると

$$v_t = -(1 - \alpha)v_{xx} + F)_{xx}$$

となる. この方程式の評価を Mullins 方程式の評価から作ることによって定理 2.1を証明する. このためには, 次の 2 点を両立するノルムを使う必要がある*3:

1. $v_t = ((1 - \alpha)v_{xx} + F)_{xx}$ の形の線形方程式に対して有効な評価ができる;
2. 1. の評価を (2.4) の α, F について使える程度の α, F の評価が与えられる.

2.2 スケールされた Hölder ノルム

前節の 1., 2. をクリアするノルムとして, 次のスケールされた Hölder ノルムを用いる.

定義 2.1. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mu \in (0, 1)$, $-\infty < a < b < +\infty$ に対し, $f : \mathbb{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ に対するスケールされた Hölder ノルム $\|f\|_{BC^{k+\mu, (k+\mu)/4}(\mathbb{R} \times (a, b))}$ を

$$\begin{aligned} \|f\|'_{BC^{k+\mu, (k+\mu)/4}(\mathbb{R} \times (a, b))} &:= \sum_{\ell+4m \leq k} (b-a)^{\ell/4+m} \sup_{x \in \mathbb{R}, t \in (a, b)} |\partial_x^\ell \partial_t^m f| \\ &+ \sum_{\ell+4m=k} (b-a)^{(k+\mu)/4} \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, \\ t \in (a, b)}} \frac{|\partial_x^\ell \partial_t^m f(x, t) - \partial_x^\ell \partial_t^m f(y, t)|}{|x - y|^\mu} \\ &+ \sum_{k-3 \leq \ell+4m \leq k} (b-a)^{(k+\mu)/4} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}, \\ s, t \in (a, b), s \neq t}} \frac{|\partial_x^\ell \partial_t^m f(x, s) - \partial_x^\ell \partial_t^m f(x, t)|}{|s - t|^{(k+\mu-\ell-4m)/4}} \end{aligned}$$

によって定義する.

定義 2.2. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mu \in (0, 1)$, $T > 0$ に対し, $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ に対するノルム $\|f\|_{Z_T^{k+\mu}}$ を

$$\|f\|_{Z_T^{k+\mu}} := \sup_{t \in (0, T)} \|f\|'_{BC^{k+\mu, (k+\mu)/4}(\mathbb{R} \times (t/2, t))} + \sup_{t \in (0, T)} (1+t)^{-1/4} \|f_x\|'_{BC^{k-1+\mu, (k-1+\mu)/4}(\mathbb{R} \times (t/2, t))}$$

により定義する.

すると, これらのノルムに関して, 次の評価が得られる.

*3 これらを両立できるようなノルムおよび線形方程式の設定を与えたことが本研究の最も重要な新規性であり, なおかつ講演者の貢献である.

補題 2.1. $\delta, \varepsilon > 0$ とし, $\alpha, F : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $v_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0, T)} \|\alpha\|'_{BC^{2+\mu, (2+\mu)/4}(\mathbb{R} \times (t/2, t))} &\leq \delta, \\ \sup_{t \in (0, T)} t^{-3/4} (1+t)^{-1/4} \|F\|'_{BC^{2+\mu, (2+\mu)/4}(\mathbb{R} \times (t/2, t))} &\leq \varepsilon, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} (|v(x)| + |v_x(x)|) &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

をみたすとする. δ が十分小さいとすると, 線形方程式

$$v_t = -(1 - \alpha)v_{xx} + F)_{xx} \text{ in } \mathbb{R} \times (0, T), \quad v(\cdot, 0) = v_0 \text{ in } \mathbb{R},$$

の解 v は

$$\|v\|_{Z_T^{4+\mu}} \leq C\varepsilon$$

をみたす.

この評価は, 放物 Schauder 評価と呼ばれる古典的な評価 (たとえば [8]) を用いて示すことができる. また, 次の評価を初等的に示すことができる.

補題 2.2. $v : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が $\|v\|_{Z_T^{4+\mu}} \leq 1$ をみたすとする, かつ

$$\alpha := 1 - \frac{1}{(1+v^2)^2} f' \left(-\frac{v_x}{(1+v^2)} \right), \quad F := \frac{3vv_x^2}{(1+v^2)^3} f' \left(-\frac{v_x}{(1+v^2)^{3/2}} \right),$$

により定義される関数 α, F は

$$\begin{aligned} \sup_{t > 0} \|\alpha\|'_{BC^{2+\mu, (2+\mu)/4}(\mathbb{R} \times (t/2, t))} &\leq C\|v\|_{Z_T^{3+\mu}}, \\ \sup_{t > 0} t^{-3/4} (1+t)^{-1/4} \|F\|'_{BC^{2+\mu, (2+\mu)/4}(\mathbb{R} \times (0, \infty))} &\leq C\|v\|_{Z_T^{3+\mu}}^3, \end{aligned}$$

をみたす.

これらを組み合わせることにより, 次の非線形評価を得ることができる.

補題 2.3. 次をみたす $\delta_0 > 0$ が存在する: u_0 が $\sup_{\mathbb{R}} (|(u_0)_x| + |(u_0)_{xx}|) =: \varepsilon_1 < \infty$ をみたすとし, u を問題 (2.1) の解とする. $v := u_x$ とすると

$$\|v\|_{Z_T^{3+\mu}} \leq \delta_0 \implies \|v\|_{Z_T^{4+\mu}} \leq C\varepsilon_1. \quad (2.5)$$

2.3 定理 2.1 の証明

ε_1 が十分小さく, 評価 (2.5) で $C\varepsilon_1 < \delta_0/2$ となるとする. まず, 十分小さい $\tau > 0$ について, $\|v\|_{Z_\tau^{4+\mu}} < \delta_0/2$ となる. (これは放物 Schauder 評価によって証明されるが, ここでは省略する.) このことから,

$$T^* := \sup \left\{ t > 0 : \|v\|_{Z_t^{4+\mu}} < \frac{\delta_0}{2} \right\} > 0$$

である. ここで $T^* < \infty$ を仮定すると, T^* に十分近い $T > T^*$ について $\|v\|_{Z_T^{3+\mu}} < \delta_0$ である. (2.5) と ε_1 の選び方から $\|v\|_{Z_T^{4+\mu}} < \delta_0/2$ となり, これは $T > T^*$ に矛盾する. 従って $T^* = \infty$ であり, ノルムの定義から $k + 4\ell \leq 5$ かつ $k \neq 0$ の場合に (2.1) が示される.

$k + 4\ell > 5$ かつ $k \neq 0$ の場合はさらなる放物 Schauder 評価の適用によって示される. $k = 0$ の場合は $k \neq 0$ の場合と $u_t = -(1 - \alpha)v_{xx} + F)_x$ から示される.

参考文献

- [1] T. Asai and Y. Giga, *On self-similar solutions to the surface diffusion flow equations with contact angle boundary conditions*, Interfaces Free Bound. **16**, 539–573.
- [2] H. Du and N. K. Yip, *Stability of self-similar solutions to geometric flows*, Interfaces Free Bound. **25** (2023), 155–191.
- [3] Y. Giga, M. Goeßwein, and S. Katayama, *Large time behavior of exponential surface diffusion flows on $\mathbb{R}$* , arXiv: 2411.17175.
- [4] H. Koch and T. Lamm, *Geometric flows with rough initial data*, Asian J. Math. **16** (2012), no. 2, 209–235.
- [5] P. A. Martin, *Thermal grooving by surface diffusion: Mullins revisited and extended to multiple grooves*, Quart. Appl. Math. **67** (2009), 125–136.
- [6] W. W. Mullins, *Two-dimensional motion of idealized grain boundaries*, J. Appl. Phys. **27** (1956), 900–904.
- [7] ———, *Theory of thermal grooving*, J. Appl. Phys. **28** (1957), 333–339.
- [8] V. A. Solonnikov, *On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **83** (1965), 3–163 (Russian).